

Beispiel 3.1

Zur Veranschaulichung sei die Fourier-Reihe einer typischen periodischen Funktion der Elektrotechnik ermittelt. Es soll die Fourier-Reihendarstellung der in Bild 3.3 gezeigten Impulsfolge ermittelt werden.

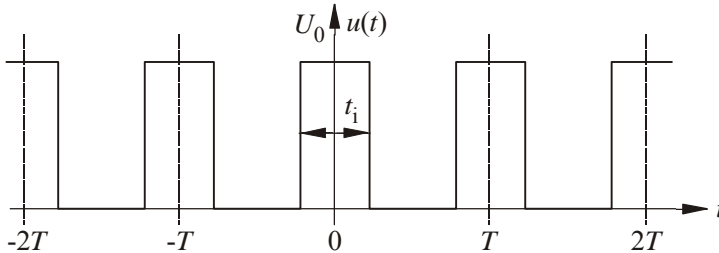


Bild 3.3 Periodische Impulsfolge

Man erhält unter Nutzung der Gleichungen (3.8), (3.9) und (3.10) und der Tatsache, dass es sich um eine gerade Funktion handelt:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{T-t_i}{2}} u(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}} U_0 dt = \frac{t_i}{T} U_0 \quad (3.44)$$

$$a_v = \frac{2}{T} \int_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{T-t_i}{2}} u(t) \cos(v\omega_1 t) dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}} U_0 \cos(v\omega_1 t) dt \quad (3.45)$$

$$b_v = 0 \quad (3.46)$$

Die Durchführung der Integration in Gleichung (3.45) ergibt

$$a_v = \frac{2U_0}{v\omega_1 T} \left[\sin\left(v\omega_1 \frac{t_i}{2}\right) - \sin\left(-v\omega_1 \frac{t_i}{2}\right) \right] \quad (3.47)$$

bzw.

$$a_v = \frac{4U_0}{v\omega_1 T} \sin\left(v\omega_1 \frac{t_i}{2}\right). \quad (3.48)$$

Benutzt man nun für die Grundkreisfrequenz ω_1 die mit Gleichung (3.5) gegebene Definition, entsteht schließlich

$$a_v = \frac{2U_0}{v\pi} \sin\left(v\pi \frac{t_i}{T}\right). \quad (3.49)$$

Unter Verwendung der Gleichungen (3.15) und (3.18) erhält man für die in Gleichung (3.19) gegebene Darstellung der Fourier-Reihe als Koeffizienten

$$A_v = \frac{2U_0}{v\pi} \left| \sin\left(v\pi \frac{t_i}{T}\right) \right|$$

$$\varphi_v = \arctan \frac{a_v}{b_v} = \begin{cases} +\frac{\pi}{2} & \text{für } \sin\left(v\pi \frac{t_i}{T}\right) > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } \sin\left(v\pi \frac{t_i}{T}\right) < 0 \end{cases} \quad (3.50)$$

und damit für die gesamte Reihe

$$u(t) = \frac{U_0 t_i}{T} \left[1 + \frac{2T}{t_i \pi} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v} \left| \sin\left(v\pi \frac{t_i}{T}\right) \right| \sin(v\omega_1 t + \varphi_v) \right]. \quad (3.51)$$

Ein besonders einfacher Fall entsteht bei einer symmetrischen Rechteckimpulsfolge, also wenn gilt $t_i = 1/2 T$. Dann wird

$$a_0 = \frac{U_0}{2}$$

$$A_v = \frac{2U_0}{v\pi} \left| \sin\left(v\frac{\pi}{2}\right) \right| = \begin{cases} \frac{2U_0}{v\pi} & \text{für } v \text{ ungerade} \\ 0 & \text{für } v \text{ gerade} \end{cases} \quad (3.52)$$

$$\varphi_v = \begin{cases} +\frac{\pi}{2} & v = 1, 5, 9, \dots \\ -\frac{\pi}{2} & v = 3, 7, 11, \dots \end{cases} \quad (3.53)$$

Die Darstellung der Amplituden der Harmonischen über der Frequenz zeigt Bild 3.4 für den Fall $t_i = 0,5 T$. Man spricht dann vom **Amplitudenspektrum**. Die entsprechende Darstellung der Phasenlagen der Harmonischen über der Frequenz, das **Phasenspektrum**, zeigt Bild 3.5 für die gleiche Funktion.

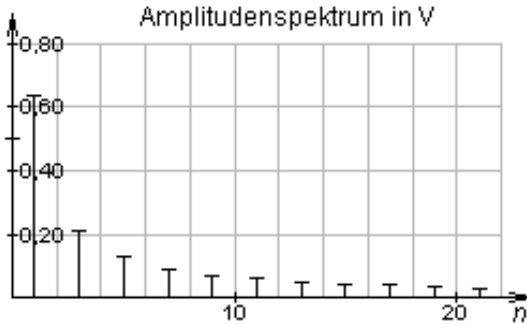


Bild 3.4
Amplitudenspektrum der
Impulsfolge nach Bild 3.3

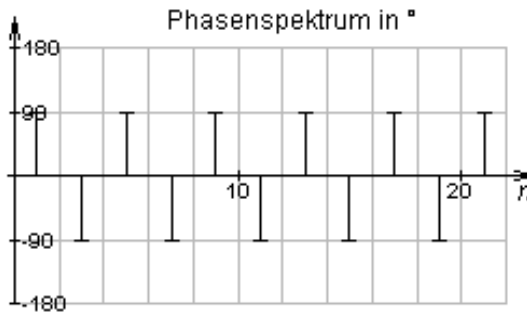


Bild 3.5
Phasenspektrum der
Impulsfolge nach Bild 3.3

Um die Konvergenz der Fourier-Reihe zu verdeutlichen, wird in Bild 3.6 und Bild 3.7 die Fourier-Reihe bis zur 7. bzw. zur 11. Harmonischen ausgewertet. Bei der Betrachtung der genannten Bilder fällt auf, dass an den Sprungstellen unabhängig von der Anzahl der einbezogenen Harmonischen ein Überschwingen von ca. 9% auftritt. Diese Erscheinung ist charakteristisch für die Eigenschaften der Fourier-Reihe und wird als das **Gibbs'sche Phänomen** bezeichnet. Es ist deutlich zu sehen, dass bei Übertragung von ca. 10 Harmonischen die Annäherung an die Ausgangsfunktion bereits recht gut ist.

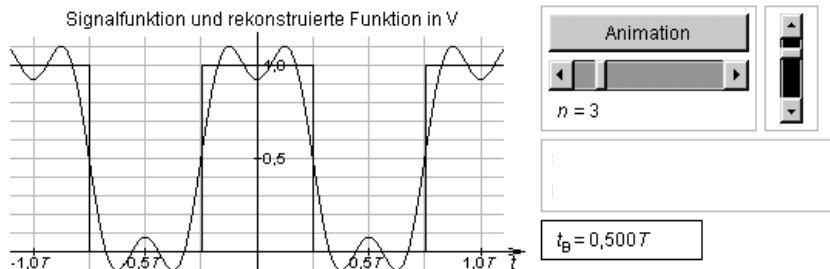


Bild 3.6 Approximation der Impulsfolge nach Bild 3.3
(Abbruch nach der 3. Harmonischen)



23021

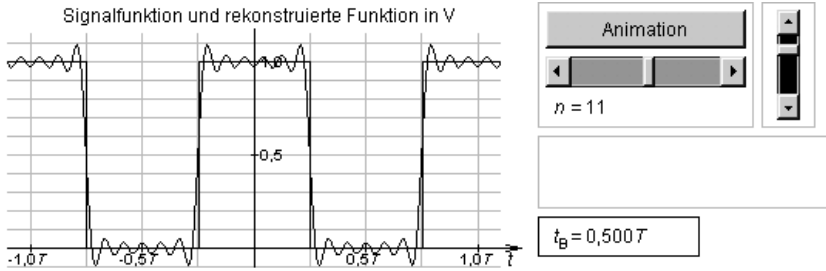


Bild 3.7 Approximation der Impulsfolge nach Bild 3.3
(Abbruch nach der 11. Harmonischen)

Die komplexe Fourier-Reihe

Da in der Wechselstromtechnik die komplexe Rechnung in Form der symbolischen Methode die eingeführteste Berechnungsmethode ist, empfiehlt es sich, auch für die Fourier-Reihe eine komplexe Form zu suchen, die der in der Wechselstromtechnik benutzten Zeigerdarstellung entgegenkommt.

Benutzt man zur Darstellung der harmonischen Funktionen durch komplexe Zeiger die *Euler'sche Formel*

$$e^{\pm j\alpha} = \cos \alpha \pm j \sin \alpha, \quad (3.54)$$

so erhält man für $\cos \alpha$ und $\sin \alpha$ durch Umstellen

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} (e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}) \quad (3.55)$$

und

$$\sin \alpha = \frac{1}{2j} (e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}). \quad (3.56)$$

Die Anwendung dieser Zusammenhänge auf die Fourier-Reihe nach Gleichung (3.4) ergibt zunächst

$$f(t) = a_0 + \sum_{v=1}^{\infty} \left[\frac{a_v}{2} (e^{jv\omega_1 t} + e^{-jv\omega_1 t}) + \frac{b_v}{2j} (e^{jv\omega_1 t} - e^{-jv\omega_1 t}) \right]. \quad (3.57)$$

Eine elementare Umformung durch entsprechendes Zusammenfassen liefert

$$f(t) = a_0 + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{a_v - jb_v}{2} e^{jv\omega_1 t} + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{a_v + jb_v}{2} e^{-jv\omega_1 t}. \quad (3.58)$$

Setzt man in der zweiten Teilsumme $v = -v$,