

$$a|_{\omega \rightarrow 0} = 20 \lg \left( 1 + \frac{R}{R_a} \right), \quad (1.81)$$

die Grenzkreisfrequenz ist

$$\omega_{\text{Grenz}} = \frac{1}{C \frac{R R_a}{R + R_a}}. \quad (1.82)$$

## 1.3.2 Resonanzkreise

### 1.3.2.1 Reihenresonanzkreis

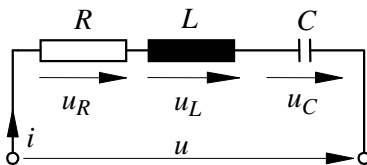


Bild 1.24 Reihenresonanzkreis

Die Schaltung nach Bild 1.24 heißt *Reihenresonanzkreis*.

Für eine bestimmte Frequenz  $\omega_0$  mit

$$0 < \omega_0 < \infty \quad (1.83)$$

sind Klemmenspannung  $u$  und Klemmenstrom  $i$  in Phase, die Anordnung verhält sich wie der Widerstand  $R$ . Dieser Zustand der Schaltung heißt *Resonanz*,  $\omega_0$  ist die Resonanzkreisfrequenz.

#### Analyse der Schaltung

Die Analyse der Schaltung folgt aus den komplexen Zusammenhängen:

Impedanz  $\underline{Z}$

$$\underline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right), \quad (1.84)$$

komplexe Stromamplitude  $\hat{\underline{I}}$

$$\hat{\underline{I}} = \frac{\hat{\underline{U}}}{\underline{Z}} = \frac{\hat{\underline{U}}}{R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}, \quad (1.85)$$

komplexe Spannungsamplituden an den Bauelementen

$$\hat{U}_R = R \hat{I}, \quad \hat{U}_L = j\omega L \hat{I}, \quad \hat{U}_C = \frac{1}{j\omega C} \hat{I}. \quad (1.86)$$

Der Scheinwiderstand der Anordnung ist

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}, \quad (1.87)$$

die Stromamplitude

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{Z} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \quad (1.88)$$

die Spannungsamplituden an den Bauelementen folgen zu

$$\hat{U}_R = \hat{U} \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \quad (1.89)$$

$$\hat{U}_L = \hat{U} \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \quad (1.90)$$

$$\hat{U}_C = \hat{U} \frac{1}{\omega C \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (1.91)$$

### Verhalten bei Resonanz, Gütefaktor $Q$

Klemmenspannung  $u$  und Klemmenstrom  $i$  sind dann in Phase, wenn durch Parameteränderung die Bedingung

$$\operatorname{Im}(\underline{Z}) = 0, \quad (1.92)$$

bzw.

$$\operatorname{Im}(\underline{Y}) = 0 \quad (1.93)$$

erfüllbar ist.

Aus den Gleichungen (1.84) und (1.92) erhält man als Bedingung für die **Resonanzkreisfrequenz**

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 \quad (1.94)$$

und damit:

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad (1.95)$$

Die **Resonanzfrequenz**  $f_0$  folgt zu:

$$\boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}} \quad (1.96)$$

Mit der Bedingung Gleichung (1.94) erhält man aus den Gleichungen (1.88) bis (1.91) für die Stromamplitude und die Spannungsamplituden

$$\hat{I}(\omega_0) = \hat{I}_0 = \frac{\hat{U}}{R}, \quad (1.97)$$

$$\hat{U}_R(\omega_0) = \hat{U}_{R0} = \hat{U}, \quad (1.98)$$

$$\hat{U}_L(\omega_0) = \hat{U}_{L0} = \frac{\omega_0 L}{R} \hat{U} = \sqrt{\frac{L}{C}} \hat{U}, \quad (1.99)$$

$$\hat{U}_C(\omega_0) = \hat{U}_{C0} = \frac{1}{\omega_0 C R} \hat{U} = \sqrt{\frac{L}{C}} \hat{U}. \quad (1.100)$$

Es ist:

$$\boxed{\frac{\hat{U}_{L0}}{\hat{U}} = \frac{\hat{U}_{C0}}{\hat{U}} = Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} = \sqrt{\frac{L}{C}}} \quad (1.101)$$

$Q$  ist die **Güte** oder der **Gütefaktor** des Resonanzkreises. Für technisch relevante Anordnungen liegt die Güte  $Q$  in der Größenordnung  $Q = 10 \dots 1000$ . Für  $Q > 1$  ist also die Spannung an den Blindelementen bei Resonanz größer als die Gesamtspannung. Bild 1.25 zeigt im Zeigerdiagramm bei Resonanz die Spannungsverhältnisse und Phasenverhältnisse für  $Q = 3$ . Messtechnisch wird die Güte aus der **Spannungsüberhöhung** am Kondensator bei Resonanz ermittelt.

### Stromdurchlasskurve

Aus den Gleichungen (1.88), (1.97) und (1.101) erhält man für die Stromamplitude:

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{\omega}{\omega_0} \frac{\omega_0 L}{R} - \frac{\omega_0}{\omega} \frac{1}{\omega_0 C R} \right)^2}}, \quad (1.102)$$

$$\frac{\hat{I}}{\hat{I}_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}. \quad (1.103)$$

Mit der Voraussetzung  $\hat{U} = \text{konst.}$  (eingeprägte Spannung) wird die Beziehung (1.103) als *Stromdurchlasskurve* des Reihenresonanzkreises bezeichnet (Bild 1.26).

Für die Spannungsamplituden an den Blindelementen erhält man analog

$$\frac{\hat{U}_L}{\hat{U}} = \frac{\omega}{\omega_0} \frac{Q}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}, \quad (1.104)$$

$$\frac{\hat{U}_C}{\hat{U}} = \frac{\omega_0}{\omega} \frac{Q}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}. \quad (1.105)$$

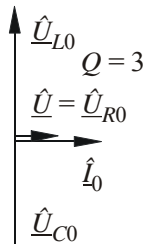


Bild 1.25 Zeigerdiagramm bei Resonanz

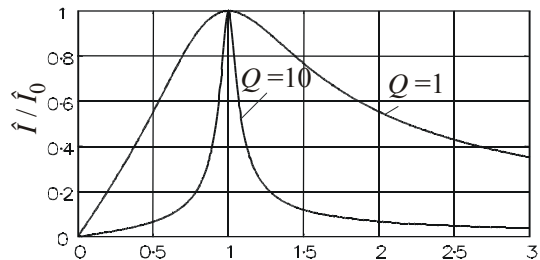


Bild 1.26 Frequenzgang der Stromamplitude

Bild 1.27 zeigt den Frequenzgang der Spannungsamplituden an den Blindelementen Kondensator (1) und Spule (2) für  $Q = 1$  und Bild 1.28 für  $Q = 10$ .

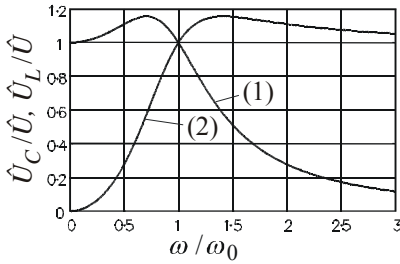


Bild 1.27 Frequenzgang der Spannungsamplituden bei  $Q = 1$

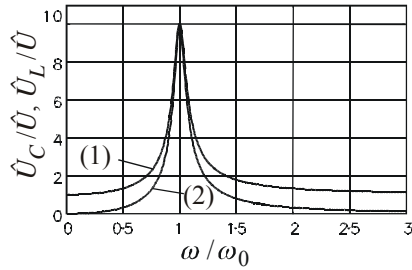


Bild 1.28 Frequenzgang der Spannungsamplituden bei  $Q = 10$

**Bandbreite, Eckfrequenzen**

Den Frequenzbereich, in dem die Stromamplitude um nicht mehr als um den Faktor  $\sqrt{2}$  gegenüber dem Maximum bei der Resonanzkreisfrequenz abgefallen ist, bezeichnet man als **Durchlassbereich** des Resonanzkreises und seine Breite als **Bandbreite**.

Die **Ortskurve** der Impedanz  $\underline{Z}(\omega)$  des Reihenresonanzkreises (Gleichung (1.84)) macht deutlich im Bild 1.29

$$Z(\omega_{+45}) = Z(\omega_{-45}) = \sqrt{2} R, \tag{1.106}$$

also gilt für die Stromamplitude

$$\hat{I}(\omega_{+45}) = \hat{I}(\omega_{-45}) = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2} R} = \frac{\hat{I}_0}{\sqrt{2}}. \tag{1.107}$$

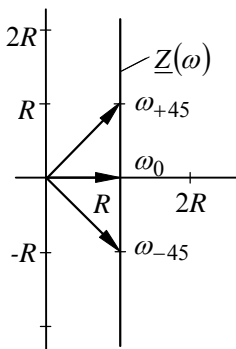


Bild 1.29 Ortskurve  $\underline{Z}(\omega)$

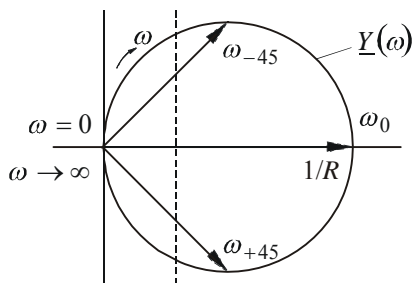


Bild 1.30 Ortskurve  $\underline{Y}(\omega)$

$\omega_{+45}$ ,  $\omega_{-45}$  sind die so genannten **45°-Eckkreisfrequenzen**. Sie lassen sich wie folgt berechnen (vgl. Bild 1.29):

$$R = \omega_{+45} L - \frac{1}{\omega_{+45} C}, \quad (1.108)$$

$$\omega_{+45} = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \quad (1.109)$$

$$R = \frac{1}{\omega_{-45} C} - \omega_{-45} L, \quad (1.110)$$

$$\omega_{-45} = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \quad (1.111)$$

Die **Bandbreite**  $b_\omega$  ist die Differenz der Eckkreisfrequenzen:

$$b_\omega = \omega_{+45} - \omega_{-45} = \frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q} \quad (1.112)$$

Die Ortskurve der Admittanz  $\underline{Y}(\omega)$  des Reihenresonanzkreises ist ein Kreis durch den Nullpunkt (Bild 1.30).

Für Kreisfrequenzen kleiner als die Resonanzkreisfrequenz verhält sich der Reihenresonanzkreis ohmsch-kapazitiv, für Kreisfrequenzen größer als die Resonanzkreisfrequenz ohmsch-induktiv.

### Beispiel 1.8

$R_1 = 20 \Omega$ ,  $L = 1 \text{ H}$ ,  $C = 10 \mu\text{F}$ ,  $\hat{U} = 230 \text{ V}$ :  $\omega_0 = 316 \text{ s}^{-1}$ ,  $f_0 = 50,3 \text{ Hz}$ ,  $Q = 15,6$ ,  
 $\hat{U}_{L0} = \hat{U}_{C0} = 3588 \text{ V}$ ,  $\omega_{+45} = 326 \text{ s}^{-1}$ ,  $\omega_{-45} = 306 \text{ s}^{-1}$ ,  $b_\omega = 20 \text{ s}^{-1}$ .

#### 1.3.2.2 Parallelresonanzkreis

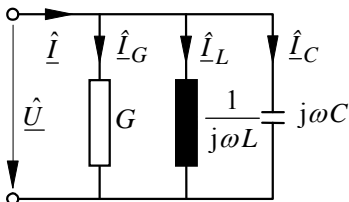


Bild 1.31 Parallelresonanzkreis

Die Schaltung nach Bild 1.31 heißt *Parallelresonanzkreis*.

Für nunmehr  $\hat{I} = \text{konst.}$  (Stromeinprägung) kann die Schaltung zur Berechnung interessierender Größen wie  $\omega_0$ ,  $\omega_{+45}$ ,  $\omega_{-45}$ ,  $\hat{U}_0$ ,  $\hat{I}_{C0}$ ,  $Q$ ,  $b_\omega$  ganz analog zu den Ausführungen beim Reihenresonanzkreis analysiert werden.