

Der Vergleich führt zu

$$\hat{U} = \frac{1}{\omega C} \hat{I}, \quad U = \frac{1}{\omega C} I, \quad \varphi_u = \varphi_i - 90^\circ \text{ wegen } \frac{1}{j} = -j = e^{-j\frac{\pi}{2}} \quad (6.103)$$

und:

$$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C}, \quad Z = \frac{1}{\omega C}, \quad \varphi_Z = -90^\circ \quad (6.104)$$

$$\underline{Y} = j\omega C; \quad Y = \omega C, \quad \varphi_Y = 90^\circ \quad (6.105)$$

Die Multiplikation des Stromzeigers mit dem Widerstandsoperator führt zum Spannungszeiger, der um  $90^\circ$  dem Stromzeiger nacheilt (Bild 6.9):

### 6.3.4 Rechenschema "Symbolische Methode"

1. Gegebene Sinuszeitfunktionen (z. B. Quellspannungen und Quellströme) und gesuchte (z. B. Zweigströme) in der Wechselstromschaltung werden durch die komplexen Maximalwerte bzw. komplexen Effektivwerte symbolisch dargestellt (Bildfunktionen):

$$u = \hat{U} \sin(\omega t + \varphi_u) \Rightarrow \underline{\hat{U}} = \hat{U} e^{j\varphi_u}, \quad \underline{U} = U e^{j\varphi_u} \quad (6.106)$$

$$i = \hat{I} \sin(\omega t + \varphi_i) \Rightarrow \underline{\hat{I}} = \hat{I} e^{j\varphi_i}, \quad \underline{I} = I e^{j\varphi_i} \quad (6.107)$$

2. Ersetzen der Bauelementeparameter durch die Widerstandsoperatoren (Scheinwiderstände ausrechnen):

$$L \Rightarrow j\omega L, \quad C \Rightarrow \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C}, \quad R \Rightarrow R \quad (6.108)$$

3. Die Kirchhoff'schen Sätze für die Zeiger und die komplexen Beziehungen an den Grundschaltelementen liefern die notwendige Zahl von Gleichungen zur Ermittlung der Bestimmungsstücke (Betrag und Winkel) der gesuchten Zeiger:

$$\sum_{\nu=1}^n \hat{I}_{\nu ab} = \sum_{\mu=1}^m \hat{I}_{\mu zu}, \quad (6.109)$$

$$\sum_{\nu=1}^n \hat{U}_{\nu} = 0, \quad (\text{vzbn}) \quad (6.110)$$

$$\underline{\hat{U}} = \underline{Z} \underline{\hat{I}} \quad (6.111)$$

bzw. für die komplexen Effektivwerte

$$\sum_{\nu=1}^n \underline{I}_{\nu ab} = \sum_{\mu=1}^m \underline{I}_{\mu zu}, \quad (6.112)$$

$$\sum_{\nu=1}^n \underline{U}_{\nu} = 0, \quad (6.113)$$

(vzb)

$$\underline{U} = \underline{Z} \underline{I}. \quad (6.114)$$

4. Nach der Berechnung der Bestimmungsstücke mittels der Rechenregeln für komplexe Zahlen können die interessierenden Zeitfunktionen aufgeschrieben werden.

### 6.3.5 Beispiele zur Analyse von Wechselstromschaltungen

#### Reihenschaltung von $R$ und $L$

An der Reihenschaltung von Wirkelement  $R$  und Blindelement  $L$  liege die Wechselspannung (Bild 6.19)

$$u = \hat{U} \sin(\omega t + \varphi_u). \quad (6.115)$$

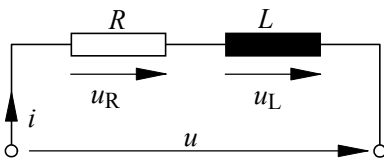


Bild 6.19 Reihenschaltung von  $R$  und  $L$

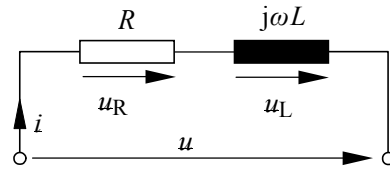


Bild 6.20 Bildfunktionen

Gesucht sind: Zeitfunktion des Klemmenstromes  $i$ , Scheinwiderstand  $Z$  der Anordnung, Zeitfunktionen der Teilspannungen  $u_R$ ,  $u_L$  über den Elementen  $R$  und  $L$ .

Für die komplexen Momentan- und Maximalwerte der Spannungen folgt (Bild 6.20):

$$0 = \underline{u}_R + \underline{u}_L - \underline{u}, \quad (6.116)$$

$$0 = \hat{U}_R + \hat{U}_L - \hat{U}. \quad (6.117)$$

Setzt man die Beziehungen an den Grundschaltelementen ein, erhält man

$$\underline{\hat{U}} = R \underline{\hat{I}} + j\omega L \underline{\hat{I}} = (R + j\omega L) \underline{\hat{I}} = \underline{Z} \underline{\hat{I}}, \quad (6.118)$$

$$\underline{\hat{I}} = \frac{\underline{\hat{U}}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{\hat{U}}}{R + j\omega L}. \quad (6.119)$$

Aus Gleichung (6.118) erhält man für den Widerstandsoperator

$$\underline{Z} = Z e^{j\varphi_Z} = R + j\omega L = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} e^{j \arctan \frac{\omega L}{R}} \quad (6.120)$$

und:

$$\boxed{Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}, \quad \varphi_Z = \arctan \frac{\omega L}{R}} \quad (6.121)$$

Der Widerstandsoperator der Reihenschaltung ist die Summe der Widerstandsoperatoren der Elemente der Reihenschaltung. Der Scheinwiderstand ist frequenzabhängig.

Die Zeitfunktion des Stromes

$$i = \hat{I} \sin(\omega t + \varphi_i) \quad (6.122)$$

kann aufgeschrieben werden, wenn die Bestimmungsstücke Maximalwert  $\hat{I}$  und Nullphasenwinkel  $\varphi_i$  bekannt sind.

$$\underline{\hat{I}} = \hat{I} e^{j\varphi_i} = \frac{\underline{\hat{U}}}{R + j\omega L} = \frac{\underline{\hat{U}} e^{j\varphi_u}}{Z e^{j\varphi_Z}} = \frac{\underline{\hat{U}}}{Z} e^{j(\varphi_u - \varphi_Z)}, \quad (6.123)$$

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{Z} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}, \quad (6.124)$$

$$\varphi_i = \varphi_u - \varphi_Z = \varphi_u - \arctan \frac{\omega L}{R}. \quad (6.125)$$

Effektiv ist, die Division im Ansatz (6.123) in der Exponentialform der Zeiger durchzuführen. Das Gleichheitszeichen erfordert die Übereinstimmung von Betrag und Winkel, so dass aus Gleichung (6.123) beide gesuchten Bestimmungsstücke  $\hat{I}$ ,  $\varphi_i$  folgen.

Bild 6.21 demonstriert die Phasenlage der Zeiger für  $R = \omega L$  und  $\varphi_u = 30^\circ$ .

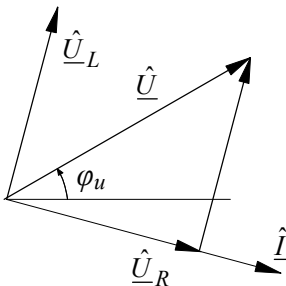


Bild 6.21 Zeigerdiagramm für  $R$  und  $L$

Die Bestimmungsstücke der Teilspannungen erhält man aus:

$$\underline{\hat{U}}_R = R \underline{\hat{I}}, \quad (6.126)$$

$$\hat{U}_R = \hat{U} \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}, \quad (6.127)$$

$$\varphi_{uR} = \varphi_i = \varphi_u - \arctan \frac{\omega L}{R}, \quad (6.128)$$

$$\underline{\hat{U}}_L = j\omega L \underline{\hat{I}}, \quad (6.129)$$

$$\hat{U}_L = \omega L \hat{I} = \hat{U} \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}, \quad (6.130)$$

$$\varphi_{uL} = \varphi_i + 90^\circ = \varphi_u - \arctan \frac{\omega L}{R} + 90^\circ. \quad (6.131)$$

### Reihenschaltung von $R$ und $C$

Die Anordnung nach Bild 6.22 soll analysiert werden.

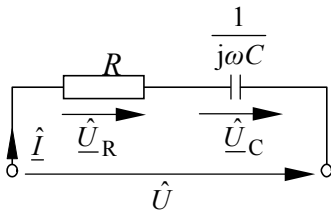


Bild 6.22 Reihenschaltung von  $R$  und  $C$

Für den Widerstandsoperator  $\underline{Z}$ , Scheinwiderstand  $Z$  und Winkel  $\varphi_Z$  gilt:

$$\underline{Z} = R + \frac{1}{j\omega C} = R + \frac{-j}{\omega C} \quad (6.132)$$

und:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}, \quad \varphi_Z = \arctan\left(-\frac{1}{\omega CR}\right) = -\arctan \frac{1}{\omega CR} \quad (6.133)$$

Für die Klemmenspannung

$$u = \hat{U} \sin(\omega t + \varphi_u) \quad (6.134)$$

folgt der Klemmenstrom

$$i = \hat{I} \sin(\omega t + \varphi_i), \quad (6.135)$$

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \quad (6.136)$$

$$\varphi_i = \varphi_u - \varphi_Z = \varphi_u + \arctan \frac{1}{\omega CR}. \quad (6.137)$$

### 6.3.6 Zweipolersatzschaltungen von Zusammenschaltungen

Wie die Ausführungen im Abschnitt 6.3.3 gezeigt haben, gelten an den Grundschalt-elementen proportionale Beziehungen zwischen den Bildfunktionen  $\underline{u}$ ,  $\hat{U}$ ,  $\underline{U}$  der Klemmenspannung  $u$  und den Bildfunktionen  $\underline{i}$ ,  $\hat{I}$ ,  $\underline{I}$  des Klemmenstromes  $i$ . Die Proportionalitätsfaktoren sind der Widerstandsoperator  $\underline{Z}$  bzw. der Leitwertoperator  $\underline{Y}$ . Für eine aus passiven Elementen zusammengesetzte Schaltung lassen sich die Widerstandsoperatoren bzw. Leitwertoperatoren der Grundschaltelemente zum Widerstandsoperator und Leitwertoperator der Schaltung zusammenfassen, wie es an den Beispielen im Abschnitt 6.3.5 demonstriert wurde.

Gegenstand der folgenden Betrachtung ist die Ermittlung der Zweipolersatzschaltungen aus Klemmenspannung  $u$  und Klemmenstrom  $i$ .

#### Reihenschaltung aus Wirk- und Blindelement

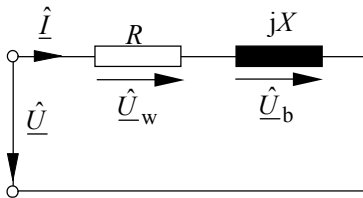


Bild 6.23 Zweipolersatzschaltung

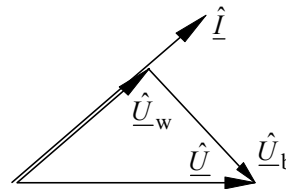


Bild 6.24 Zeigerdiagramm

Bild 6.23 zeigt die Ersatzschaltung einer passiven Zusammenschaltung, bestehend aus der Reihenschaltung von Wirk- und Blindelement. Die Elemente der Ersatzschaltung  $R$ ,  $X$  werden aus den Bildfunktionen der Klemmengrößen wie folgt bestimmt:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} \\ &= \frac{\hat{U}}{\hat{I}} \cos(\varphi_u - \varphi_i) + j \frac{\hat{U}}{\hat{I}} \sin(\varphi_u - \varphi_i) = R + jX. \end{aligned} \quad (6.138)$$

$$R = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} \cos(\varphi_u - \varphi_i) = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} \cos \varphi \quad (6.139)$$

ist der **Wirkwiderstand**, die **Resistanz** der Anordnung. Es ist  $R \geq 0$ .

$$X = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} \sin(\varphi_u - \varphi_i) = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} \sin \varphi \quad (6.140)$$

ist der **Blindwiderstand**, die **Reaktanz** der Anordnung. Es ist  $X > 0$  für  $\varphi > 0$  (induktives Verhalten) und  $X < 0$  für  $\varphi < 0$  (kapazitives Verhalten).

$$Z = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \sqrt{R^2 + X^2} \quad (6.141)$$

ist der **Scheinwiderstand** der Anordnung und wird als **Impedanz** bezeichnet.

Die Klemmenspannung teilt sich auf in einen Wirkspannungsanteil über  $R$  und einen Blindspannungsanteil über  $X$ . Bild 6.24 zeigt das Zeigerdiagramm zur Zweipolersatzschaltung nach Bild 6.23 für einen ohmsch-kapazitiven Lastfall. Für die Ersatzelemente gilt auch

$$R = \frac{\hat{U}_w}{\hat{I}}, \quad (6.142)$$

$$|X| = \frac{\hat{U}_b}{\hat{I}}. \quad (6.143)$$

### Parallelschaltung aus Wirk- und Blindelement

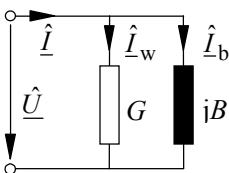


Bild 6.25 Zweipolersatzschaltung

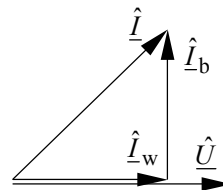


Bild 6.26 Zeigerdiagramm

Bild 6.25 zeigt die Ersatzschaltung einer passiven Zusammenschaltung, bestehend aus der Parallelschaltung von Wirk- und Blindelement. Die Elemente der Ersatzschaltung  $G, B$  werden wie folgt bestimmt:

$$\begin{aligned} \underline{Y} &= \frac{\underline{i}}{\underline{u}} = \frac{\hat{I}}{\hat{U}} = \frac{\hat{I}}{\hat{U}} e^{j(\varphi_i - \varphi_u)} \\ &= \frac{\hat{I}}{\hat{U}} \cos(\varphi_i - \varphi_u) + j \frac{\hat{I}}{\hat{U}} \sin(\varphi_i - \varphi_u) = G + jB. \end{aligned} \quad (6.144)$$

$$G = \frac{\hat{I}}{\hat{U}} \cos(\varphi_i - \varphi_u) = \frac{\hat{I}}{\hat{U}} \cos(-\varphi) = \frac{\hat{I}}{\hat{U}} \cos \varphi \quad (6.145)$$

ist der **Wirkleitwert**, die **Konduktanz** der Anordnung. Es ist  $G \geq 0$ .

$$B = \frac{\hat{I}}{\hat{U}} \sin(\varphi_i - \varphi_u) = \frac{\hat{I}}{\hat{U}} \sin(-\varphi) = -\frac{\hat{I}}{\hat{U}} \sin \varphi \quad (6.146)$$

ist der **Blindleitwert**, die **Suszeptanz** der Anordnung. Es ist  $B < 0$  für  $\varphi > 0$ .

$$Y = \frac{\hat{I}}{\hat{U}} = \sqrt{G^2 + B^2} \quad (6.147)$$

ist der **Scheinleitwert**, die **Admittanz** der Anordnung.

Wählt man diese Zweipolersatzschaltung, teilt sich der Klemmenstrom auf in einen Wirkstromanteil durch  $G$  und einen Blindstromanteil durch  $B$ . Bild 6.26 zeigt das Zeigerdiagramm zur Zweipolersatzschaltung nach Bild 6.25 für einen ohmsch-kapazitiven Lastfall. Für die Ersatzelemente gilt auch

$$G = \frac{\hat{I}_w}{\hat{U}}, \quad (6.148)$$

$$|B| = \frac{\hat{I}_b}{\hat{U}}. \quad (6.149)$$

### Umrechnung der Elemente der Ersatzschaltung

Sind die Elemente der Ersatzschaltung  $R$  und  $X$  bekannt, können die Elemente der äquivalenten Ersatzschaltung  $G$  und  $B$  bestimmt werden und umgekehrt:

$$G + jB = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = \frac{R}{R^2 + X^2} + \frac{-jX}{R^2 + X^2}, \quad (6.150)$$

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2}, \quad B = \frac{-X}{R^2 + X^2}, \quad (6.151)$$

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2}, \quad X = \frac{-B}{G^2 + B^2}. \quad (6.152)$$

### Beispiel

Ein Zweipol nimmt an der Spannung  $U = 60 \text{ V}$  bei der Frequenz  $f = 5 \text{ kHz}$  den Strom  $I = 0,1 \text{ A}$  auf und zeigt den Phasenwinkel  $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = -85^\circ$ . Die Elemente der Reihen-Ersatzschaltung  $R$ ,  $X$  und der Parallel-Ersatzschaltung  $G$ ,  $B$  sind zu ermitteln.