1.3 Elektrothermische Energiewandlungsvorgänge in Gleichstromkreisen

1.3.1 Grundgesetze der Erwärmung und des Wärmeaustauschs

Erwärmung

Soll ein Körper der Masse m von einer Ausgangstemperatur T_1 auf eine andere Temperatur $T_2 > T_1$ erwärmt werden, so bedeutet das, dass eine Energie

$$\boxed{W_{\mathrm{erw}} = m\,c\left(T_2 - T_1\right)} \tag{1.173}$$

aufgebracht werden muss. Dabei ist c die **spezifische Wärmekapazität** des Körpers (Materialkonstante). Das Produkt

$$\boxed{C_{\mathrm{th}} = m\,c} \tag{1.174}$$

wird auch als die **Wärmekapazität** eines Körpers bezeichnet. Die entsprechenden Einheiten sind

$$\left[c\right] = 1\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}} = 1\,\frac{\mathrm{W}\cdot\mathrm{s}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}}, \quad \left[C_{\mathrm{th}}\right] = 1\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} = 1\,\frac{\mathrm{W}\cdot\mathrm{s}}{\mathrm{K}}. \tag{1.175}$$

Da für technische Berechnungen wegen der besseren Formulierbarkeit der Leistungsbilanz sehr häufig die Leistung benötigt wird, die zur Erwärmung eines Körpers aufgewendet werden muss, erhält man für den Erwärmungsprozess bei zeitlich veränderlicher Temperatur des Körpers als **Leistungsbedarf**

$$P_{\mathrm{erw}} = \frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{erw}}}{\mathrm{d}t} = m\,c\,\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t} = C_{\mathrm{th}}\,\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t}. \tag{1.176}$$

Wird, was häufig vorkommt, nicht die absolute Temperatur zur Berechnung herangezogen, sondern die Temperaturdifferenz bezüglich einer Bezugstemperatur T_0 (i. d. R. die Umgebungstemperatur), spricht man von der **Übertemperatur** $\vartheta_{\ddot{\mathrm{u}}}$ des erwärmten Körpers. Man erhält dann

$$\vartheta_{\ddot{\mathrm{u}}}(t) = T(t) - T_0, \tag{1.177}$$

$$\boxed{P_{\mathrm{erw}} = m\,c\,\frac{\mathrm{d}\vartheta_{\ddot{\mathrm{u}}}}{\mathrm{d}t} = C_{\mathrm{th}}\,\frac{\mathrm{d}\vartheta_{\ddot{\mathrm{u}}}}{\mathrm{d}t}} \tag{1.178}$$

Aus Gleichung (1.178) ergibt sich unmittelbar ein für die Berechnung von elektrothermischen Vorgängen sehr wichtiger Stetigkeitssatz. Es wird sofort deutlich, dass jede sprungförmige Änderung der Temperatur eines Körpers wegen des dann unendlichen Differenzialquotienten eine unendlich hohe Leistungszufuhr erfordern würde.

Da dies in natürlichen Systemen unmöglich ist, darf gefolgert werden:

$$\boxed{\vartheta_{\text{ü}}(t-0)=\vartheta_{\text{ü}}(t+0)} \tag{1.179}$$

Die Temperatur eines Körpers kann sich nicht sprunghaft ändern.

Wärmeübertragung

Hat nun ein Körper gegenüber seiner Umgebung eine höhere Temperatur, so setzen Prozesse ein, die auf eine Wiederherstellung des thermischen Gleichgewichtes hinwirken.

Es muss also **Wärmeenergie** vom wärmeren, also energiereicheren Körper zum kälteren Körper transportiert werden. Die zeitliche Ableitung, also die **Wärmeleistung**, wird auch als **Wärmestrom** Φ bezeichnet. Dieser Wärmestrom ist grundsätzlich vom wärmeren zum kälteren Körper bzw. innerhalb eines Mediums mit unterschiedlicher Temperaturverteilung in Richtung des maximalen Temperaturgefälles gerichtet.

Für den Wärmetransport sind drei Vorgänge charakteristisch:

Wärmeleitung

Im Rahmen dieses Buches soll nur die eindimensionale *Wärmeleitung* betrachtet werden.

Für einen im Bild 1.65 dargestellten Stab der Länge l und des senkrecht vom Wärmestrom Φ_{L} durchsetzten Querschnitts A ist der Wärmetransport durch Wärmeleitung vom wärmeren zum kälteren Ende:

$$\boxed{\Phi_{\text{L}}=\frac{\lambda A}{l}(T_1-T_2)=\frac{\lambda A}{l}\vartheta_{\text{ü}}} \tag{1.180}$$

Gleichung (1.180) gilt jedoch nur für den Fall, dass der Wärmefluss ausschließlich in der in Bild 1.65 dargestellten Richtung erfolgt, die seitlichen Flächen also wärmeisoliert sind bzw. so betrachtet werden können.

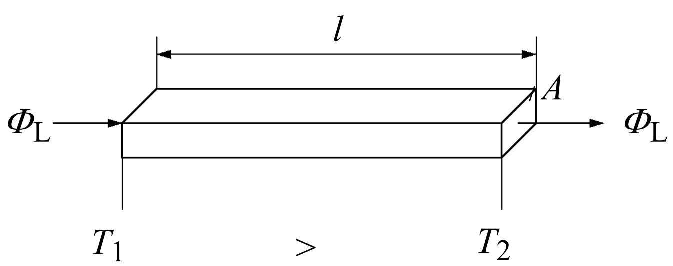

Bild 1.65 Darstellung der Wärmeleitung (eindimensional)

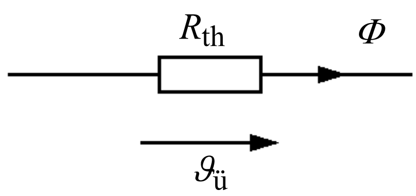

Bild 1.66 Ersatzschaltbild des Wärmewiderstandes

Die Werkstoffkonstante λ wird als **Wärmeleitfähigkeit** bezeichnet.

Ihre Einheit ist

$$[\lambda]=1\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}}\,. \tag{1.181}$$

In Analogie zum elektrischen Widerstand definiert man als **Wärmewiderstand** (thermischen Widerstand):

$$\boxed{R_{\mathrm{th\,L}}=\frac{\vartheta_{\ddot{\mathrm{u}}}}{\Phi_{\mathrm{L}}}=\frac{\Delta T}{\Phi_{\mathrm{L}}},\quad \left[R_{\mathrm{th\,L}}\right]=1\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}}} \tag{1.182}$$

Der thermische Widerstand wird häufig zur Beschreibung komplexer Wärmetransportvorgänge herangezogen und durch ein ebenfalls der Analogie zu den elektrischen Stromkreisen entlehntes Symbol dargestellt (Bild 1.66).

Wärmeübergang

An der Grenzfläche zwischen Festkörpern und Flüssigkeiten bzw. Gasen treten durch die Auftriebskräfte in erwärmten Flüssigkeiten und Gasen neben der Wärmeleitung noch Strömungsvorgänge auf, die den Wärmeaustausch wesentlich beeinflussen. Dieser komplexe Prozess des Wärmeüberganges wird als *Konvektion* bezeichnet. Erfolgt die Bewegung der Moleküle der Flüssigkeit bzw. des Gases ausschließlich durch thermisch bedingte Auftriebskräfte, spricht man von *freier Konvektion*. Im Fall einer durch Lüfter o. ä. verursachten Strömung handelt es sich um *erzwungene Konvektion*. Der Wärmestrom zwischen einer Wandoberfläche und einem strömenden Medium ergibt sich zu:

$$\boxed{\Phi_{\mathrm{K}}=\alpha_{\mathrm{K}}\,A\left(\vartheta_{\mathrm{W}}-\vartheta_{\mathrm{M}}\right)=\alpha_{\mathrm{K}}\,A\,\vartheta_{\ddot{\mathrm{u}}}} \tag{1.183}$$

A - wärmeabgebende Fläche, α_{K} - **Wärmeübergangskoeffizient** ϑ_{W} - Temperatur der Wandoberfläche, ϑ_{M} - Temperatur des **strömenden** Mediums.

Die Einheit von α_{K} ist

$$[\alpha_{\mathrm{K}}]=1\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{K}}\,. \tag{1.184}$$

Die Ermittlung der Konvektionskonstanten ist wegen der Überlagerung von Wärmeleitungs- und Strömungsvorgängen sehr schwierig und wird ebenfalls häufig experimentell vorgenommen. Für unbewegte Luft (freie Konvektion) kann in freier Umgebung

$$\alpha_{\mathrm{K}}=10\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{K}} \tag{1.185}$$

als guter Mittelwert angenommen werden. Für Konvektion in komplizierten Strukturen und mit künstlicher Bewegung muss auf das einschlägige Schrifttum verwiesen werden.

Der Wärmewiderstand bei Konvektion ist:

$$\boxed{R_{\text{th K}} = \frac{\vartheta_{\text{ü}}}{\Phi_{\text{K}}} = \frac{1}{\alpha_{\text{K}}\, A}} \tag{1.186}$$

Temperaturstrahlung (Wärmestrahlung)

Wie aus der Physik bekannt, sendet jeder Körper, dessen Temperatur oberhalb des absoluten Nullpunktes liegt, elektromagnetische Wellen aus, deren Wellenlänge in den Bereich der Temperaturstrahlung fällt.

Der Strahlungsfluss Φ_{es} des schwarzen Körpers mit der thermodynamischen Temperatur T und der Oberfläche A beträgt

$$\Phi_{\text{es}} = \sigma\, A T^4 = C_{\text{s}}\, A \left(\frac{T}{100}\right)^4 . \tag{1.187}$$

Dabei ist $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ die Stefan-Bolzmann-Konstante, $C_{\text{s}} = 10^8 \cdot \sigma$.

Der vom wärmeren zum kälteren Körper übergehende **Austauschstrahlungsfluss** ist unter Anwendung des Stefan-Boltzmann´schen Strahlungsgesetzes:

$$\boxed{\Phi_{\text{e12}} = A_1\, C_{12} \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right]} \tag{1.188}$$

A_1 - Oberfläche des wärmeren Körpers mit der Temperatur T_1, C_{12} - **Strahlungsaustauschkonstante**

Für einen grauen Körper der Fläche 1, der völlig von einer grauen Fläche 2 umhüllt ist, ergibt sich z. B. die Strahlungsaustauschkonstante C_{12} zu:

$$C_{12} = \frac{C_{\text{s}}}{\dfrac{1}{\varepsilon_1} + \dfrac{A_1}{A_2}\left(\dfrac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)} \tag{1.189}$$

ε_1, ε_2 - halbräumliche Emissionsgrade der Flächen 1 und 2.

Häufig gilt $A_1 << A_2$, $\varepsilon_2 > 0{,}5$. Damit wird für die Strahlungsaustauschkonstante nach Gleichung (1.189)

$$C_{12} = \varepsilon_1\, C_{\text{s}} . \tag{1.190}$$

Für kleine Übertemperaturen (d. h. T_1 ist nur wenig größer als T_2) lässt sich der Austauschstrahlungsfluss über den Differenzialquotienten ausdrücken gemäß

$$\Phi_{\mathrm{e}12}(T_1) = \Phi_{\mathrm{e}12}(T_2) + \left.\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e}12}(T)}{\mathrm{d}t}\right|_{T=T_2} (T_1 - T_2)\,. \tag{1.191}$$

Nach Einsetzen und Berechnung erhält man

$$\Phi_{\mathrm{e}12}(T_1) = \frac{4\,C_{12}}{100} A_1 \left(\frac{T_2}{100}\right)^3 (T_1 - T_2) = A_1\,\alpha_{\mathrm{St}}\,(T_1 - T_2)\,. \tag{1.192}$$

α_{St} - Wärmeübergangskoeffizient der Strahlung.

Geht man davon aus, dass für viele technische Aufgabenstellungen kleine Übertemperaturen auftreten, stellt diese Linearisierung eine nützliche Vereinfachung der Berechnungsverfahren dar.

Linearisierter Wärmeübergang

Ganz allgemein lässt sich der linearisierte eindimensionale Wärmeübergang durch folgende Gleichung ausdrücken:

$$\boxed{\Phi = \alpha_{\mathrm{ü}}\, A(T_1 - T_2) = \alpha_{\mathrm{ü}}\, A\,\vartheta_{\mathrm{ü}}} \tag{1.193}$$

$\alpha_{\mathrm{ü}}$ - **Wärmeübergangskoeffizient**, A - vom Wärmestrom senkrecht durchsetzte Fläche.

Der Wärmeübergangskoeffizient berücksichtigt insbesondere die Tatsache, dass bei den meisten Wärmetransportvorgängen an Grenzflächen Festkörper - Luft o. ä. sowohl Wärmestrahlung als auch Konvektion beteiligt sind. Er wird häufig für vorgegebene Anordnungen experimentell bestimmt.

1.3.2 Erwärmungs- und Abkühlungsvorgang

Geht man davon aus, dass in einem elektrischen Widerstand die dort umgewandelte Leistung direkt in Wärme umgesetzt wird, so ergibt die *Leistungsbilanz* allgemein

$$P_{\mathrm{el}} = P_{\mathrm{erw}} + \Phi\,. \tag{1.194}$$

Benutzt man zur Beschreibung der daraus folgenden *Erwärmungsvorgänge* den unter Gleichung (1.193) formulierten Zusammenhang für geringe Übertemperaturen, entsteht:

$$\boxed{P_{\mathrm{el}} = m\,c\,\frac{\mathrm{d}\vartheta_{\mathrm{ü}}(t)}{\mathrm{d}t} + \alpha_{\mathrm{ü}}\, A\,\vartheta_{\mathrm{ü}}(t)} \tag{1.195}$$

Die Lösung der so entstehenden linearen Differenzialgleichung 1. Ordnung ergibt die Zeitabhängigkeit der Übertemperatur des Systems. Unter der Bedingung, dass